

# Amortissement Landau

Yilin Wang      Zihui Zhao

Encadrant: Benjamin Texier

## 1 Introduction

### 1.1 Modélisation

Le problème à plusieurs corps est très difficile, celui à trois corps, le problème de Poincaré, a déjà une énorme complexité. Mais quand le nombre de particules dans le système devient très grand, on pourra passer du discret au continu, ce qui nous offre de nombreuses méthodes de résolution.

Ici nous considérons un système dont la force d'interaction dérive d'un potentiel  $W$  qui est a une certaine intégrabilité, par exemple dans le cas linéaire,  $\nabla W \in L^1(\mathbb{T}^d)$  ou dans le cas non-linéaire, sa transformée de Fourier doit satisfaire

$$|\widehat{W}(k)| = O\left(\frac{1}{|k|^{1+\gamma}}\right), \text{ pour } \gamma \geq 1.$$

En particulier, quand  $\gamma = 1$ ,  $W$  est une solution fondamentale de  $\pm\Delta$ , qu'on appelle *le couplage de Poisson*. C'est un cas limite qui physiquement intéressant, (par exemple quand  $d = 3$ , cela correspond à l'interaction de Coulomb, la gravitation, etc.)

On considère  $N$  particules identiques, notées par leur position et vitesse,  $\{(x_1(t), v_1(t)), \dots, (x_N(t), v_N(t))\}$ . Connaître l'état du système à temps  $t$  est équivalent à connaître tous les  $(x_i, v_i)$ , *i.e* connaître la mesure

$$\hat{\mu}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i(t), v_i(t))} \quad (1)$$

où  $\delta_{(x,v)}$  dénote la masse de Dirac dans l'espace de phase  $X^d \times \mathbb{R}^d$ , où  $X^d = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{T}^d$ . Dans notre exposé, nous ne considérerons que le cas  $\mathbb{T}^d$ , *i.e* ayant une périodicité spatiale, ce qui simplifie énormément l'étude de comportement asymptotique des solutions et est plutôt réaliste dans un plasma.

Notons que  $\mathbb{P}(X^d \times \mathbb{R}^d)$  l'espace de probabilité auquel appartient  $\hat{\mu}_t^N$ , ne dépend pas du nombre  $N$  de particules. On va établir le lien entre les lois de Newton et l'équation des mesures par la proposition suivante.

**Proposition 1.** *Soit un système sans collisions qui vérifie les lois de Newton :*

$$\forall i, \dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = -c \sum_{j \neq i} \nabla W(x_i - x_j) = -cN(\nabla W *_{x,v} \hat{\mu}^N),$$

alors formellement

$$\partial_t \hat{\mu}^N + v \cdot \nabla_x \hat{\mu}^N + F^N[\hat{\mu}^N] \cdot \nabla_v \hat{\mu}^N = 0 \quad (2)$$

où

$$F^N[\hat{\mu}^N](t, x) = -c \sum_j \nabla W(x - x_j) = -cN(\nabla W *_{x,v} \hat{\mu}^N)$$

*Démonstration.* L'équation (2) est au sens de distribution, prenant une fonction test  $\varphi = \varphi(x, v)$  appliquée à la partie gauche de l'équation, on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{N} \sum_i \varphi(x_i, v_i) \right] - \frac{1}{N} \sum_i (v \cdot \nabla_x \varphi)|_{(x_i, v_i)} - \sum_i (F^N \cdot \nabla_v \varphi)|_{(x_i, v_i)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_i (\nabla_x \varphi \cdot \dot{x}_i + \nabla_v \varphi \cdot \dot{v}_i - \nabla_x \varphi \cdot v_i - \nabla_v \varphi \cdot F^N(x_i)) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Supposons que  $\hat{\mu}_t^N$  converge faiblement vers un certain  $\mu_t$ , que

$$cN \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda, \quad (*)$$

et que  $W$  est uniformément continu, alors la mesure dépendant de temps  $\mu = \mu_t(dx dv)$  est formellement solution de

$$\begin{cases} \partial_t \mu + v \cdot \nabla_x \mu + F[\mu] \cdot \nabla_v \mu = 0 \\ F = -\lambda \nabla W *_{x,v} \mu \end{cases}$$

Dans le cas où  $W$  est singulier (qui est le cas physiquement important), la justification de la limite "équation pour la mesure empirique vers équation de Vlasov" est un problème ouvert très important.

Physiquement il est intéressant de ne considérer que de répartition continue de matière, qui correspond à une mesure à densité, *i.e*  $\mu_t(dx dv) = f(t, x, v) dx dv$ . Le régime asymptotique (\*) porte le nom "limite de champ moyen". On se ramène de milliers d'équations pour chaque particule suivant la loi de Newton à une seule équation dont la solution  $f = f(t, x, v)$  est la densité de la répartition de matière à temps  $t$  dans l'espace des phases. On trouve finalement l'équation de Vlasov :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = 0 \\ F[f] = -\nabla W *_{x,v} \rho \quad \rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv. \end{cases} \quad (3)$$

L'étude du comportement asymptotique de cette équation différentielle partielle non linéaire, en particulier la stabilité des solutions spatialement homogènes, fait l'objet de notre exposé.

## 1.2 Analogie avec l'équation différentielle en dimension finie

Pour étudier la stabilité d'un équilibre d'une équation différentielle autonome  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i.e une solution  $g(t) = g^0$  telle que  $X(g^0) = 0$ , on fait souvent appel au théorème de Lyapunov, qui ramène l'équation en question non-linéaire en une équation linéaire.

**Théorème 2.** *Si une équation différentielle autonome  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est linéaire, alors l'équilibre 0 est stable si et seulement si :*

$$\text{sp}(X) \subset \{z \in \mathbb{C}, \text{Re } z \leq 0\} \quad \text{et} \quad (z \in \text{sp}(X) \cap i\mathbb{R} \Rightarrow z \text{ est semi-simple})$$

et 0 est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\text{sp}(X) \subset \{z \in \mathbb{C}, \text{Re } z < 0\}$$

**Théorème 3** (Lyapunov). *Si  $f^0$  est un équilibre asymptotiquement stable pour le système linéarisé  $y' = X'(f^0)(y - f^0)$ , alors  $f^0$  est asymptotiquement stable pour  $X$ .*

*Si  $f^0$  est un équilibre de  $X$  tel que  $X'(f^0)$  a une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors  $f^0$  est instable.*

Ainsi, la stabilité asymptotique linéaire implique la stabilité asymptotique non-linéaire. Et la non-stabilité linéaire due à une valeur propre de partie réelle  $> 0$  implique la non-stabilité non-linéaire.

Le problème de stabilité est alors réduit à une question élémentaire d'algèbre, il suffit d'étudier le spectre de l'opérateur linéaire  $X'(f^0)$ .

On aimerait appliquer ces résultats à

$$\partial_t f = -(v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f) = X(f)$$

où  $X : C^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Malheureusement, on n'a pas un critère similaire à celui de Lyapunov pour l'espace  $C^\infty$  qui n'est pas un Banach, sinon la question de la stabilité deviendrait très simple.

Mais on verra quand même une ressemblance entre les conditions suffisantes de stabilité de la Vlasov avec celles de la Vlasov linéarisée qui consistent à imposer une certaine régularité sur la donnée initiale  $f^i$ , l'équilibre étudié  $f^0$  et le potentiel  $W$ , parmi lesquelles, une condition **(L)** est la même :

**(L)** Il existe  $\lambda, \kappa > 0$  tels que

$$\forall \xi \in \mathbb{C} \text{ avec } 0 \leq \text{Re}(\xi) < \lambda|k|, \quad \inf_{k \in \mathbb{Z}^d} |K^L(\xi, k) - 1| \geq \kappa$$

avec

$$K^L(\xi, k) = \int_0^t e^{2\pi\xi^*t} K(t, k) dt, \quad \text{et, } K(t, k) = -4\pi^2 \widehat{W}(k) \tilde{f}^0(kt) |k|^2 t.$$

Condition **(L)** est impliquée par exemple par les critères de Penrose ([MV], proposition 2.1), dont l'une est une condition de petitesse de  $|\widehat{W}(k)|, |\tilde{f}^0(\eta)|$ . Sous la forme de  $F(\widehat{W}(k), \tilde{f}^0(\eta)) < 1$ , où  $F$  est une fonction croissante de ses deux arguments.

### 1.3 Les résultats

La stabilité des solutions de la Vlasov linéarisée a été d'abord étudiée par Landau. On verra déjà une interprétation de la réversibilité de l'amortissement. Le travail de C.Mouhot et C.Villani [MV] étend les résultats de Landau pour l'équation de Vlasov-Poisson non-linéaire sous le régime perturbative (*i.e* la donnée initiale est suffisamment proche de l'équilibre, ce qui n'est pas nécessaire dans le cas linéaire).

Soient  $f^0 = f^0(v)$  un équilibre homogène analytique satisfaisant les critères de Penrose, et le potentiel d'interaction  $W$  qui satisfait

$$|\widehat{W}(k)| \leq \frac{C_W}{|k|^{1+\gamma}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^d$$

pour un certain  $C_W > 0$  et  $\gamma \geq 1$ . Alors on a la stabilité non-linéaire et l'amortissement non-linéaire au voisinage de  $f^0$ .

Plus précisément, on définit la norme

$$\|f\|_{\lambda, \mu} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d} e^{2\pi\mu|k|} e^{2\pi\lambda|\eta|} |\tilde{f}(k, \eta)|.$$

On peut alors énoncer le résultat de C.Mouhot et C.Villani :

**Théorème 4** ([MV] C.Mouhot & C.Villani, théorème 2.6). *Soit*

1.  $f^0$  et  $W$  satisfont la condition **(L)** avec un certain  $\lambda, \kappa > 0$  ;
2. avec le même paramètre  $\lambda$ , il existe un constant  $C_0 > 0$  tel que

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} e^{2\pi\lambda_0|\eta|} |\tilde{f}^0(\eta)| \leq C_0, \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{\lambda_0^n}{n!} \|\nabla_v^n f^0\|_{L^1(dv)} \leq C_0.$$

Alors pour tout  $0 < \lambda' < \lambda, \beta > 0$  et  $0 < \mu' < \mu$ , il existe

$$\epsilon = \epsilon(d, C_W, C_0, \kappa, \lambda, \lambda', \mu, \mu', \beta, \gamma)$$

tell que : si la condition initiale  $f^i$  est une perturbation de  $f^0$  au sens où

$$\|f^i - f^0\|_{\lambda, \mu} + \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f^i(x, v) - f^0(v)| e^{2\pi\beta|v|} dv dx \leq \epsilon,$$

alors il existe une solution globale, (ce qui n'est pas du tout évident pour une équation différentielle non-linéaire). Et il existe un équilibre homogène  $f_{\pm\infty}(v)$  (correspond à  $t \rightarrow \pm\infty$ ), tel que

$$\begin{aligned} \|f(t, x + vt, v) - f_{\pm\infty}(v)\|_{\lambda', \mu'} &= O(e^{-2\pi\lambda'|t|}), \\ \|F(t, \cdot)\|_{C^r(\mathbb{T}^d)} &= O(e^{-2\pi\lambda'|t|}), \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nous donnerons le fil principal de la démonstration dans la partie 3, et y développerons l'étude de l'équation de la réaction dans un milieu oscillant où se produit un effet d'écho. Avant de se lancer dans la présentation des ingrédients principaux de leur preuve, on va d'abord voir une conséquence impressionnante de leurs résultats : C'est un amortissement réversible.

On remarque<sup>1</sup> que le théorème ne s'applique pas aux donnés qui sont  $C^\infty$  à support compact non trivial, puisque la décroissance exponentielle de ses transformés de Fourier implique son analyticité. Une amélioration est de travailler dans les espaces de Gevrey, qui ont l'avantage de contenir les fonctions  $C^\infty$  à support compact, c'est à dire changer la condition de décroissance exponentielle  $|\tilde{f}^0| \leq Ce^{-\lambda|\eta|}$  en une décroissance plus faible :  $|\tilde{f}^0| \leq Ce^{\lambda|\eta|^{1/s}}$  avec  $s > 1$ .

#### 1.4 Quantité invariante

Par la méthode des caractéristiques,  $f(t, S_{0,t}(x, v)) = f^i(x, v)$ , où  $S_{0,t}(x, v)$  est le flot du système :

$$\begin{cases} \dot{X}_t = V_t, & \dot{V}_t = F(t, X_t), & F = -\nabla W * \rho, \\ (X_0, V_0) = (x, v) \end{cases} \quad (4)$$

**Proposition 5.** *L'équation différentielle en  $A$  :  $A'(t) = B(t)A(t)$ , où  $A(t), B(t) \in M_n(\mathbb{R})$  vérifient :  $\det(A(t)) = e^{\int_0^t \text{tr}(B(t)) dt} \det(A_0)$ .*

*Démonstration.* Comme  $\det(A(t))$  vérifie l'équation différentielle : si  $A(t_0)$  est inversible, alors

$$\begin{aligned} (\det(A(t)))'|_{t=t_0} &= d_{A(t_0)} \det(A'(t_0)) \\ &= \text{tr}(A(t_0)^{-1} A'(t_0)) \det(A(t_0)) = \text{tr}(B(t_0)) \det(A(t_0)), \end{aligned}$$

cette égalité est aussi vérifiée si  $A(t_0)$  non inversible par la densité de  $GL_n(\mathbb{R})$  et la régularité au moins  $C^2$  de  $\det$ . On a ainsi l'égalité cherchée par intégration en  $t$ .  $\square$

---

1. C'est une remarque que Jeff Rauch avait faite à Cédric.

**Proposition 6.** *Le flot  $S_{0,t}$  de (4) préserve la mesure  $dx dv$ , i.e le jacobien de  $S_{0,t}$  est égal à 1 en tout  $(x, v)$ .*

*Démonstration.* Un système d'équation de flot  $S_{0,t}$ , pour  $(x, v)$  fixé,

$$S'_{0,t}(x, v) = (\dot{x}_t, \dot{v}_t) = B_t(S_{0,t}(x, v))$$

ici  $B_t(x, v) = (\nabla_v H, -\nabla_x H)$ , en posant  $H(X, V) = \frac{V^2}{2} + W * \rho$

$$\text{Jac}(S_{0,t})(x, v)'|_{t=t_0} = \text{Jac}(B_{t_0})(x(t_0), v(t_0))\text{Jac}(S_{0,t_0})(x, v).$$

Si  $\text{tr}(\text{Jac}(B_t)(x(t), v(t))) = 0, \forall t$ , alors en appliquant la proposition précédente,  $\det(\text{Jac}(S_{0,t})(x, v)) = 1$  comme  $S_{0,0} = Id$ .

Ici c'est le cas car, le système (4) a une structure hamiltonienne,

$$\begin{cases} \dot{X}_t = \nabla_V H \\ \dot{V}_t = -\nabla_X H. \end{cases}$$

le théorème de Schwartz assure que la trace est constamment nulle.  $\square$

*Remarque.* Le résultat ci-dessus n'est pas vrai dans une variété quelconque.

Cette structure hamiltonienne assure l'invariance de mesure par  $S_{0,t}$ . Il en résulte que pour toute application  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,

$$\iint A(f(t, x, v)) dx dv$$

est invariante dans le temps. En particulier **l'entropie**

$$- \iint f \log(f) dx dv$$

est constante.

On obtient ainsi qu'autour d'une solution homogène  $f^0(v)$  asymptotiquement stable pour une certaine topologie,  $f(t, x, v)$  converge *sans augmentation d'entropie* vers  $f^0(v)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , alors que la force associée  $F(t, x)$  tend vers 0, d'où le nom «l'amortissement», et très contre-intuitivement, un amortissement réversible.

## 2 Approximation linéaire

### 2.1 Équation de transport libre

On va d'abord considérer l'équation de transport libre :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \\ f|_{t=0} = f^i(x, v) \end{cases} \quad (5)$$

On trouve rapidement, par la méthode des caractéristiques, l'égalité

$$f(t, x, v) = f^i(x - vt, v).$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à  $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ , on trouve

$$\tilde{f}(t, k, \eta) = \iint f^i(x - vt, v) e^{-2\pi i x \cdot k} e^{-2\pi i v \cdot \eta} dv dx = \tilde{f}^i(k, \eta + kt).$$

- Quand  $k = 0$ ,  $\tilde{f}(t, 0, \eta) = \tilde{f}^i(0, \eta)$ , signifie que  $\langle f \rangle = \int f dx$  est conservé.
- Si  $\tilde{f}^i(k, \eta) \leq C(e^{-2\pi\lambda|\eta|})$ , pour  $\eta$  fixé et  $k \neq 0$ , on a alors  $\tilde{f}(t, k, \eta) = \tilde{f}^i(k, \eta + kt) = O(e^{-2\pi\lambda|k|t})$ , on a d'après [MV]

$$f(t, x, v) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{faiblement}} \langle f^i \rangle$$

La notion de convergence faible n'est pas très claire dans leur papier. On peut l'interpréter au sens suivant, on pose

$$g(t, x, v) = f(t, x, v) - \langle f \rangle_x(v)$$

si pour tout  $t$ ,  $g \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ , alors pour toute fonction test  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ ,

$$\langle g, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)} = \langle \tilde{g}, \tilde{\varphi} \rangle_{L^2(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^d)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

où la première égalité résulte du théorème de Plancherel, et la convergence s'obtient par le théorème de convergence dominée.

## 2.2 Équation de Vlasov linéarisée

Comme  $F = -\nabla W * \rho$  est un gradient,  $f(t, x, v) = f^0(v)$  est bien une solution homogène de (3). Nous allons étudier la stabilité de ces équilibres homogènes.

Soit  $f^0$  un de ces équilibre, on cherche une solution de la forme

$$f(t, x, v) = f^0(v) + h(t, x, v) \quad \text{avec} \quad \|h\| = O(\epsilon).$$

On le remplace dans (3), et on espère que le terme  $\|F[h] \cdot \nabla_v h\|$  est négligeable devant  $\|F[h] \cdot \nabla_v f^0\|$ . On obtient ainsi l'équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t h + v \cdot \nabla_x h + F[h] \cdot \nabla_v f^0 = 0 \\ h|_{t=0} = h^i(x, v) \end{cases} \quad (6)$$

Physiquement on peut penser se retrouver dans un milieu où interagissent deux sortes de particules, et seulement entre eux, dont l'une a une répartition invariante dans le temps.

Si l'on écrit  $S = F[h] \cdot \nabla_v f^0$ , alors  $\partial_t h + v \cdot \nabla_x h = -S$ . Par la méthode de caractéristiques et le principe de Duhamel, on a

$$h(t, x, v) = h^i(x - vt, v) - \int_0^t S(\tau, x - v(t - \tau), v) d\tau$$

et sa transformée de Fourier

$$\tilde{h}(t, k, \eta) = \tilde{h}^i(k, \eta + kt) - \int_0^t \tilde{S}(\tau, k, \eta + k(t - \tau)) d\tau.$$

Une remarque très importante est que  $S = F[h] \cdot \nabla_v f^0$  est le produit d'une fonction de  $(t, x)$  avec une fonction de  $v$ , cela implique que pour la transformée de Fourier de  $S$ , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, k, \eta) &= \widehat{F[h]}(t, k) \cdot \widetilde{\nabla_v f^0}(\eta) \\ &= -\widehat{\nabla W}(k) \hat{\rho}(t, k) \cdot \widetilde{\nabla_v f^0}(\eta) \\ &= 4\pi^2 k \cdot \eta \widehat{W}(k) \tilde{f}^0(\eta) \end{aligned}$$

- si  $k = 0$ ,  $\tilde{S}(\tau, 0, \eta) = 0$ ,  $\tilde{h}(t, 0, \eta) = \tilde{h}^i(0, \eta)$
- si  $k \neq 0$ , soit  $\rho^1(t, x) = \int h dv$ , alors  $\hat{\rho}(t, k) = \int f^0(v) dv + \int \widehat{h}(t, x, v) dv = \hat{\rho}^1(t, k)$ .

d'où

$$\tilde{h}(t, k, \eta) = \tilde{h}^i(k, \eta + kt) - 4\pi^2 \widehat{W}(k) \int_0^t \hat{\rho}^1(\tau, k) \tilde{f}^0(\eta + k(t - \tau)) k \cdot [\eta + k(t - \tau)] d\tau \quad (7)$$

on prend  $\eta = 0$ , on trouve

$$\hat{\rho}^1(t, k) = \tilde{h}^i(k, \eta + kt) + \int_0^t K(t - \tau, k) \hat{\rho}^1(\tau, k) d\tau \quad (8)$$

avec  $K(t, k) = -4\pi^2 \widehat{W}(k) \tilde{f}^0(kt) |k|^2 t$ .

La séparation des variables de  $S$  fait que les différentes modes de  $\rho^1$  ne se couplent pas. On peut donc résoudre (8) mode par mode.

### 2.3 Équation de Volterra

On cherche à résoudre les équations (8) qui sont de forme

$$\phi(t) = a(t) + \int_0^t K(t - \tau) \phi(\tau) d\tau \quad (9)$$

Soit  $\Phi(t) = e^{2\pi\lambda't} \phi(t)$ ,  $A(t) = e^{2\pi\lambda't} a(t)$  dont on déterminera la valeur de  $\lambda'$  plus tard, (9) devient

$$\Phi(t) = A(t) + \int_0^t K(t - \tau) e^{2\pi\lambda'(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau$$



on prolonge  $\Phi$ ,  $K$ ,  $A$  par 0 pour  $t \leq 0$ , et on prend la transformée par rapport à  $t$ , alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\Phi}(\omega) = \widehat{A}(\omega) + K^L(\lambda' + i\omega)\widehat{\Phi}(\omega)$$

où  $K^L$  désigne la transformée de Laplace complexe

$$K^L(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{2\pi\xi^*t} K(t) dt, \quad \xi \in \mathbb{C}$$

soit finalement

$$\widehat{\Phi}(\omega) = \frac{\widehat{A}(\omega)}{1 - K^L(\lambda' + i\omega)}$$

On suppose qu'il existe des constantes  $C_0, C_i, \lambda_0, \lambda, \Lambda, \kappa > 0$ , telles que

1.  $|K(t)| \leq C_0 e^{-2\pi\lambda_0 t} \quad |a(t)| \leq C_i e^{-2\pi\lambda_0 t}$
2.  $|K^L(\xi) - 1| \geq \kappa > 0 \quad \text{pour } 0 \leq \text{Re}\xi \leq \Lambda$

alors si  $\lambda' < \min\{\Lambda, \lambda, \lambda_0\}$ ,  $K^L(\lambda' + i\omega)$  sont bien définis, et

$$|1 - K^L(\lambda' + i\omega)| \geq \kappa.$$

D'après le théorème de Plancherel,

$$\|\Phi\|_{L^2(dt)} = \|\widehat{\Phi}\|_{L^2(d\omega)} \leq \frac{\|\widehat{A}\|_{L^2(d\omega)}}{\kappa} = \frac{\|A\|_{L^2(dt)}}{\kappa} \leq \frac{C_i}{\kappa\sqrt{4\pi(\lambda - \lambda')}}$$

on peut donc borner  $\Phi$ . On voit donc que la condition de type **(L)** est cruciale.

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^\infty(dt)} &\leq \|A\|_{L^\infty(dt)} + \|(Ke^{2\pi\lambda't}) * \Phi\|_{L^\infty(dt)} \\ &\leq \|A\|_{L^\infty(dt)} + \|(Ke^{2\pi\lambda't})\|_{L^2(dt)} \|\Phi\|_{L^2(dt)} \\ &\leq C_i + \frac{C_0 C_i}{4\pi\kappa\sqrt{(\lambda_0 - \lambda')(\lambda - \lambda')}} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall \lambda' < \min\{\lambda, \lambda_0, \Lambda\}, \quad |\phi(t)| \leq CC_i e^{-2\pi\lambda't} \text{ avec } C = C(C_0, \lambda_0, \lambda, \Lambda, \kappa, \lambda')$$

## 2.4 Conclusion du cas linéaire

Revenons à nos moutons,  $K(t, k) = -4\pi^2 \widehat{W}(k) \tilde{f}^0(k) |k|^2 t$ .

**Proposition 7.** *Si on a*

1. Condition sur le potentiel  $\|\nabla W\|_{L^1} \leq C_W < \infty$ ,

2. Condition sur la donnée initiale et le équilibre  $f^0$   
 Il existe des constantes  $\lambda > 0$ ,  $C > 0$ , tel que  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d$

$$|\hat{f}^0(\eta)| + |\tilde{h}^i(k, \eta)| \leq C e^{-2\pi\lambda|\eta|}$$

3. **(L)** est vérifié avec les constantes  $\lambda, \kappa > 0$ .

Alors, la solution  $h$  de l'équation (6) vérifie  $\forall \lambda' < \lambda$ ,

- on a  $\forall k \neq 0, |\hat{\rho}^1(t, k)| = O(e^{-2\pi\lambda'|k|t})$  donc uniformément en  $k \in \mathbb{Z}_*^d$ ,
- $\|\rho(t, \cdot) - \langle \rho \rangle\|_{C^r} = O(e^{-2\pi\lambda'|t|})$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,
- $|\tilde{h}(t, k, \eta) - \tilde{h}^i(k, \eta + kt)| = O(e^{-2\pi\lambda'|kt|})$  pour tout  $(k, \eta) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* - Le noyau  $K$  vérifie les conditions de l'équation de Volterra, on obtient :  $\forall k \neq 0, |\hat{\rho}^1(t, k)| \leq C(\lambda, \lambda', \kappa) e^{-2\pi\lambda'|k|t}$ .

- De plus  $\|\rho^1 - \langle \rho^1 \rangle\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}(t) = O(e^{-2\pi\lambda't})$  pour tout  $s \in \mathbb{N}$ . L'injection de Sobolev montre que la convergence est forte dans  $C^r$ .
- On peut contrôler l'intégrale dans l'équation (7), en prenant en compte  $|\hat{\rho}(\tau, k)| = O(e^{-2\pi\lambda'|k|\tau})$  et  $|\tilde{f}^0(\eta + k(t - \tau))| = O(e^{-2\pi\lambda'|\eta + k(t - \tau)|})$  et en cédant un peu sur  $\lambda'$ , on a pour tout  $\lambda'' < \lambda'$ ,  
 $|4\pi^2 \widehat{W}(k) \int_0^t \hat{\rho}^1(\tau, k) \tilde{f}^0(\eta + k(t - \tau)) k \cdot [\eta + k(t - \tau)] d\tau| = O(e^{-2\pi\lambda''|\eta + kt|})$ .  
 D'où  $|\tilde{h}(t, k, \eta) - \tilde{h}^i(k, \eta + kt)| = O(e^{-2\pi\lambda'|kt|})$ .  $\square$

*Remarque.* 1.  $h(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{faiblement}} \langle h^i \rangle$  par même argument dans la partie 2.1.

2. Comme  $\tilde{h}(t, k, -kt) = O(1)$ , la décroissance de  $\tilde{h}$  n'est pas uniforme, mais chaque mode a une décroissance exponentielle pour  $k \neq 0$ , et pour  $k = 0$  on sait déjà que  $\tilde{h}(t, 0, \eta) = \tilde{h}^i(0, \eta)$ .
3. Au cours du temps,  $h$  voit une oscillation forte en mode  $(k, -kt)$  qui correspond à une perte de régularité en vitesse.

Même si la densité spatiale converge fortement vers sa moyenne, et la force associée  $F[h]$  converge exponentiellement vite vers 0, (dû au fait que  $F[h] = -\nabla W * \rho$ ,  $F[\widehat{h}](t, k) = -\nabla \widehat{W} \cdot \hat{\rho}(t, k)$  qui a une même décroissance que  $\rho$ ), l'information n'est pas vraiment perdue, elle est stockée dans l'oscillation des vitesses.

## 3 Équation de Vlasov non-linéaire

### 3.1 Méthode de Newton

La preuve de C. Mouhot et C. Villani utilise de manière essentielle la méthode de Newton, qui est une méthode itérative pour chercher un zéro  $x_\infty$  d'une fonction  $\Phi(x)$ . En faisant une bonne estimation, on fixe  $x_0$  proche de  $x_\infty$ . Au rang  $n$ , on résout l'équation

$$\Phi(x_n) + \nabla \Phi(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Alors  $x_n$  converge vers le zéro  $x_\infty$  cherché avec l'estimation

$$|x_n - x_\infty| \leq C\delta^{2^n}, \quad \text{où } \delta = |x_0 - x_\infty|.$$

Pour une EDP abstraite

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = Q(f) \\ f|_{t=0} = f^i(x, v) \end{cases},$$

la solution de cette EDP proche d'un équilibre homogène  $f^0(v)$  est équivalente à un zéro au voisinage de  $f^0(v)$  de la équation

$$Q(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} - Q(f), f(0, \cdot) - f^i \right).$$

À partir de  $f_0 = f^0(v)$ , la méthode de Newton est de résoudre

$$\Phi(f_n) + \nabla\Phi(f_n) \cdot (f_{n+1} - f_n) = 0$$

Il faut faire attention que ici la dérivée  $\nabla$  est par rapport à la fonction au lieu d'une variable de dimension finie. C'est à dire, soit  $h^n = f^n - f^{n-1}$ , on veut résoudre l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t h^1 = Q'(f^0) \cdot h^1 \\ h^1(0, \cdot) = f^i - f^0, \end{cases}$$

et pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h^{n+1} = Q'(f^n) \cdot h^{n+1} - [\partial_t f^n - Q(f^n)] \\ h^{n+1}(0, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Par induction, pour  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{cases} \partial_t h^{n+1} = Q'(f^n) \cdot h^{n+1} + [Q(f^{n-1} + h^n) - Q(f^{n-1}) - Q'(f^{n-1}) \cdot h^n] \\ h^{n+1}(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

Dans le cas de l'équation de Vlasov,

$$Q(f) = -v \cdot \nabla_x f - F[f] \cdot \nabla_v f$$

où la non-linéarité provient du terme quadratique, via la force  $F[f] = \nabla W * \int f dv$ . Donc on peut simplifier (10) notre équation avec

$$Q(f^{n-1} + h^n) - Q(f^{n-1}) - Q'(f^{n-1}) \cdot h^n = -F[h^n] \cdot \nabla_v h^n.$$

Donc, on définit la méthode de Newton pour la équation de Vlasov non-linéaire par :

$$f^0 = f^0(v) \quad \text{un équilibre homogène donné,}$$

$$f^n = f^0 + h^1 + \dots + h^n,$$

où

$$\begin{cases} \partial_t h^1 + v \cdot \nabla_x h^1 + F[h^1] \cdot \nabla_v f^0 = 0 \\ h^1(0, \cdot) = f^1 - f^0 \end{cases} \quad (11)$$

et pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h^{n+1} + v \cdot \nabla_x h^{n+1} + \underbrace{F[f^n] \cdot \nabla_v h^{n+1}}_{(a)} + \underbrace{F[h^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n}_{(b)} = \underbrace{-F[h^n] \cdot \nabla_v h^n}_{(c)} \\ h^{n+1}(0, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

L'équation (11) est le même comme l'équation de Vlasov linéaire que on a étudiée dans la section 2. Mais l'équation (12) est assez compliquée. L'idée c'est de la diviser en trois parties.

Sans les termes (a), (b) et (c), (12) est l'équation de transport libre. Avec seulement (a), c'est une perturbation du transport libre avec une force  $F[f^n]$  assez petite. Avec seulement (b), et l'équation est similaire à l'équation de Vlasov linéaire sauf que  $f^n$  dépend de  $(t, x, v)$  donc il n'y a pas de séparation des variables comme on a remarqué dans la partie 2. Et on peut montrer que la norme de (c) est petite dans un régime perturbatif, (mais bien entendu, il faut prouver que si  $f^i$  est proche de  $f^0$ , alors la solution reste toujours proche de  $f^0$ ). L'étude de l'effet de (a) sera développée dans la section 3.3, l'effet de (b) dans 3.4.

### 3.2 La norme analytique

Le choix des normes est important dans l'analyse de l'équation de Vlasov, donc on présente ici quelques propriétés importantes de ces normes sans preuve. A priori, parmi les normes pour les fonctions analytiques, il y en a deux qui interviennent souvent dans la preuve.

**Définition 1.** Soit  $f$  une fonction analytique d'un variable,  $p \in [1, \infty]$  et  $\lambda \geq 0$ . On définit

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{\lambda;p}} := \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^n}{n!} \|f^{(n)}\|_{L^p}, \quad \text{et} \quad \|f\|_{\mathcal{F}^{\lambda;p}} := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{2\pi\lambda p|k|} |\hat{f}(k)|^p \right)^{1/p},$$

Si  $p = \infty$ , ce dernier sera  $\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| e^{2\pi\lambda|k|}$ . On écrit

$$\mathcal{C}^\lambda := \mathcal{C}^{\lambda;\infty}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^\lambda := \mathcal{F}^{\lambda;1}.$$

Les normes  $\mathcal{C}^\lambda$  et  $\mathcal{F}^\lambda$  nous intéressent parce qu'elles sont des normes d'algèbre :

$$\|fg\|_\lambda \leq \|f\|_\lambda \|g\|_\lambda.$$

On utilise de nouveau la méthode des caractéristiques :

$$f(t, S_{0,t}(x, v)) = f^i(x, v),$$

ou l'inverse :

$$f(t, x, v) = f^i(S_{t,0}(x, v)) = f^i(S_{0,t}^{-1}(x, v)),$$

où  $S_{0,t}$  est la caractéristique définie dans la section (1.4). Donc on voudrait considérer la propriété de ces normes quand on fait la composition d'une fonction analytique et la caractéristique. Mouhot et Villani ont prouvé la proposition suivante [MV] :

**Proposition 8.** 1. Pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\|f \circ (Id + G)\|_{\mathcal{F}^\lambda} \leq \|f\|_{\mathcal{F}^{\lambda+\nu}}, \quad \nu = \|G\|_{\mathcal{F}^\lambda};$$

2. Pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $a > 0$ ,

$$\|f \circ (aId + G)\|_{\mathcal{C}^\lambda} \leq \|f\|_{\mathcal{F}^{a\lambda+\nu}}, \quad \nu = \|G\|_{\mathcal{C}^\lambda};$$

où

$$\|G\|_{\mathcal{F}^\lambda} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|, \quad \text{et} \quad \|G\|_{\mathcal{C}^\lambda} := \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d \setminus \{0\}} \frac{\lambda^n}{n!} \|f^{(n)}\|_{L^\infty}$$

sont les normes de  $\mathcal{F}^\lambda$  et  $\mathcal{C}^\lambda$  privées de 0.

Pour la démonstration, on peut consulter la proposition 4.8 de [MV].

Quand on choisit une norme pour notre question (un variable périodique  $x \in \mathbb{T}^d$ , et l'autre variable  $v \in \mathbb{R}^b$ ), on considère : d'abord, la norme  $\mathcal{F}^\lambda$  applique au cas périodique  $x \in \mathbb{T}^d$ , et elle s'adapte bien à l'amortissement de Landau grâce à sa correspondance avec la décroissance exponentielle de la transformée de Fourier ; mais on n'a pas de transformée de Fourier pour  $S_{0,t}(x, v)$  par rapport à  $v$  (note que l'application affine  $x \mapsto a \cdot x + b$  appartient à  $\mathcal{C}^\lambda$  mais pas à  $\mathcal{F}^\lambda$ ), donc on choisit la norme  $\mathcal{C}^\lambda$  pour la variable  $v$ . Donc on introduit la norme analytique hybride de deux variables :

**Définition 2** (La norme hybride). Pour  $\lambda, \mu > 0$  et  $p \in [1, \infty]$ , on définit

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^{\lambda, \mu; p}} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|n|} \|\widehat{\nabla_v^n f}(k, v)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Il reste à traiter l'oscillation rapide de la variable  $v$ . Comme on a noté dans le cas du transport libre,

$$\tilde{f}(t, k, \eta) = \tilde{f}^i(k, \eta + kt).$$

Ça nous emène à introduire un paramètre  $\tau$  et appliquer le semi-groupe du transport libre  $S_{0,\tau}^0(x, v) = (x + v\tau, v)$  à la fonction de répartition, ou précisément,

**Définition 3.** Pour  $\lambda, \mu > 0$  et  $p \in [1, \infty]$ , on définit

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu; p}} := \|f \circ S_{0, \tau}^0\|_{\mathcal{Z}^{\lambda, \mu; p}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^n}{n!} e^{2\pi\mu|l|} \left\| (\nabla_v + 2\pi i \tau k)^n \widehat{f}(k, v) \right\|_{L^p(\mathbb{R}_v^d)}.$$

L'idée c'est que on choisit  $\tau$  égal ou au moins asymptotiquement égal à  $t$ , et on adapte l'ampleur de la régularité à l'oscillation de  $v$ , et alors on se concentre aux modes de Fourier importants qui glissent au cours de temps.

On peut montrer rapidement que :

**Proposition 9.** 1. Soit  $f = f(x)$ , alors

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu}} = \|f\|_{\mathcal{F}^{\lambda|\tau|+\mu}};$$

2. soit  $f = f(v)$ , alors

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu; p}} = \|f\|_{\mathcal{C}^{\lambda; p}}.$$

*Remarque.* Note que la force  $F[f]$  est une fonction de  $(t, x)$ , donc pour tout  $\tau$

$$\|F[f](t, \cdot)\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu}} = \|F[f](t, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda|\tau|+\mu}}.$$

En gros ça correspond à la décroissance exponentielle de la transformée de Fourier de  $F[f]$ .

De plus,

**Proposition 10.** ([MV], proposition 4.17)

1. Soit  $\lambda \leq \lambda'$  et  $\mu \leq \mu'$ , alors

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu}} \leq \|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda', \mu'}};$$

2. soit  $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ , alors

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_{\tau'}^{\lambda, \mu}} \leq \|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu + \lambda|\tau' - \tau|}}.$$

*Remarque.* La première est facile à comprendre : on peut considérer  $\lambda$  et  $\mu$  comme le largeur de convergence, donc on a plus de régularité avec l'augmentation de  $\lambda$  et  $\mu$ . La dernière nous dit que les familles des espaces  $\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu}$  ne sont pas monotone par rapport au paramètre  $\tau$ , donc on ne peut pas les comparer.

La norme (3) semble trop compliquée, mais on peut prouver l'injections entre elle et une norme plus standard

$$\|f\|_{X_\tau^{\lambda, \mu}} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d} |\tilde{f}(k, \eta)| e^{2\pi\lambda|\eta+kt|} e^{2\pi\mu|k|}$$

(avec une perte de la régularité suffisamment petite). Finalement, même si on travaille et estime la norme dans les espaces compliquées  $\mathcal{Z}_\tau^{\lambda, \mu}$ , on peut obtenir les résultats plus clairs sur la norme  $X_\tau^{\lambda, \mu}$ .

### 3.3 Caractéristiques avec l'amortissement de la force

Dans cette section on va étudier la première partie de la méthode de Newton, en gardant que le terme (a), on a l'équation :

$$\partial_t h^{n+1} + v \cdot \nabla_x h^{n+1} + F[f^n] \cdot \nabla_v h^{n+1} = 0$$

avec une force  $F[f^n]$  assez petite. Pour comparer la dynamique perturbée avec le transport libre, on définit alors l'opérateur de deflection :

pour  $0 \leq \tau \leq t$ ,

$$\Omega_{t,\tau}(x, v) := S_{t,\tau} \circ S_{\tau,t}^0(x, v),$$

Ici  $S_{\tau,t}^0(x, v) = (x + (t - \tau)v, v)$  est la caractéristique du transport libre,  $S_{\tau,t}(x, v) = (X_{\tau,t}, V_{\tau,t})$  est la caractéristique avec une perturbation  $F(t, x)$ , dont l'équation des caractéristiques s'écrit comme

$$\begin{cases} \frac{dX_{\tau,t}}{dt} = V_{\tau,t}, & \frac{dV_{\tau,t}}{dt} = F(t, X_{\tau,t}) \\ (X_{\tau,t}, V_{\tau,t})|_{t=\tau} = (x, v) \end{cases}$$

Comme c'est un processus réversible,  $S_{t,\tau}$  est l'inverse de  $S_{\tau,t}$ . C'est à dire, on part au temps  $\tau$  et évolue par la dynamique libre jusqu'au temps  $t$ , et après on revient en arrière en évoluant par la dynamique avec la perturbation. L'idée est de comparer  $\Omega_{t,\tau}$  avec l'identité pour étudier l'influence de la perturbation. On a la proposition suivante :

**Proposition 11.** *Soit  $0 < \lambda' < \lambda$ ,  $0 < \mu' < \mu$  et*

$$\|F\| := \sup_{t \geq 0} \|F(t, \cdot)\|_{\lambda t + \mu} \leq \frac{(\mu - \mu')(\lambda - \lambda')^2}{C}$$

avec un constant  $C$  assez grand, alors

$$\|\Omega_{t,\tau} - Id\|_{\mathcal{Z}^{\lambda', \mu'}} \leq C \|F\| e^{-2\pi(\lambda - \lambda')\tau} \min(t - \tau, \frac{1}{\lambda - \lambda'}).$$

La démonstration peut être trouvée dans [Vi], proposition 6.1.

*Remarque.* Note que cette estimation est

1. de décroissance exponentielle quand  $\tau \rightarrow \infty$ ,
2. uniforme quand  $t \rightarrow \infty$ ,
3. petite quand  $\tau \rightarrow t$ .

### 3.4 Echos - Réaction contre un milieu oscillant

Dans cette partie, on va développer un peu plus sur l'effet donné par le terme (b) dans l'équation (12),  $F[h^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n$ , i.e dans la méthode de Newton, on néglige :

$$\begin{cases} \partial_t h^{n+1} + v \cdot \nabla_x h^{n+1} + \cancel{F[f^n] \cdot \nabla_v h^{n+1}} + F[h^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n = -\cancel{F[h^n] \cdot \nabla_v h^n} \\ h^{n+1}(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

L'équation étudiée est donc

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F[f](t, x) \cdot \nabla_v \bar{f}(t, x, v) = 0 \quad (13)$$

où la fonction  $\bar{f}$  est "le milieu oscillant forcé" supposé donné, qui diffère de la linéarisation discutée dans la partie 2 par sa dépendance en  $x$ . Il en résulte que dans la transformée de Fourier, la source devient convolution des coefficients de Fourier au lieu d'un simple produit.

On pose  $\bar{f} = f^0 + \bar{h}$ ,  $f^0$  est l'équilibre étudié. Comme dans la partie 2, on applique le principe de Duhamel, puis la transformation de Fourier, en intégrant par rapport à  $v$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t, k) &= \tilde{f}^i(k, kt) \\ &+ \int_0^t \iint (\nabla W * \rho)(\tau, x - v(t - \tau)) \cdot (\nabla_v f^0)(\tau, x - v(t - \tau), v) e^{-2i\pi k \cdot x} dx dv d\tau \\ &+ \int_0^t \iint (\nabla W * \rho)(\tau, x - v(t - \tau)) \cdot (\nabla_v \bar{h})(\tau, x - v(t - \tau), v) e^{-2i\pi k \cdot x} dx dv d\tau \end{aligned}$$

dont le dernier intégrale égale à

$$\begin{aligned} &\int_0^t \iint (\nabla W * \rho) \cdot (\nabla_v \bar{h})(\tau, x, v) e^{-2i\pi k \cdot x} e^{-2i\pi k \cdot v(t - \tau)} dx dv d\tau \\ &= \int_0^t \int \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\nabla W}(k - l) \hat{\rho}(\tau, k - l) (\widehat{\nabla_v \bar{h}})(\tau, l, v) e^{-2i\pi k \cdot v(t - \tau)} dv d\tau \quad (14) \\ &= \int_0^t \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\nabla W}(k - l) \hat{\rho}(\tau, k - l) (\widetilde{\nabla_v \bar{h}})(\tau, l, k(t - \tau)) d\tau \end{aligned}$$

*Remarque.* Maintenant les modes de  $\rho$  sont couplés entre eux.

Pour voir l'effet de cette nouvelle source, on va supposer que  $f^0 = 0$ .

On rappelle la norme d'analyticité  $\mathcal{F}$  :

$$\|f\|_{\mathcal{F}^\lambda} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi\lambda|k|} |\hat{f}(k)|$$

Dans la partie 2, nous avons une borne des coefficients de Fourier de  $\rho$ ,  $|\hat{\rho}^1(t, k)| = O(e^{-2\pi\lambda|k|t})$ , il peut paraître naturelle d'étudier  $\|\rho(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda+\mu}}$ , pour certains  $\lambda, \mu$  déterminés par la petitesse de  $f^i$  et  $\bar{h}$ . En supposant

$$\widehat{\nabla W}(k - l) = O\left(\frac{1}{|k - l|^\gamma}\right), \text{ pour } \gamma \geq 1,$$

(14) permet d'obtenir une estimation de  $\|\rho(t, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda+\mu}} = \varphi(t)$ , avec  $\bar{\mu} > \mu$  et  $\bar{\lambda} > \lambda$  arbitraire fixés,

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda+\mu}} \leq A(t) + C \int_0^t K(t, \tau) \|\rho(\tau, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda+\mu}} d\tau \quad (15)$$

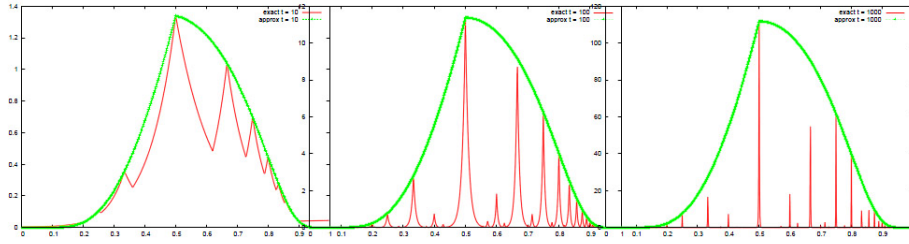


dans laquelle  $A(t)$  est la contribution de la donnée initiale, et

$$K(t, \tau) = \sup_{k,l} \left( \frac{|k|(t-\tau)e^{-2\pi(\bar{\lambda}-\lambda)|k(t-\tau)+l\tau|}e^{-2\pi(\bar{\mu}-\mu)|l|}}{1+|k-l|^\gamma} \right). \quad (16)$$

*Remarque.*  $K(t, \tau)$  dépend implicitement  $\lambda, \mu, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \gamma$ .

En gardant les termes dominants  $l = -1$  et  $k > 0$  dans (16), on trace les courbes  $K(t, \tau)$  en  $\tau$  pour les valeurs  $t = 10, 100, 1000$ , qui sont sous l'enveloppe dans la figure ci-dessous.



La masse de  $K$  se concentre sur certaines valeurs de  $\tau$  telles qu'il existe  $k, l \in \mathbb{Z}$

$$k(t - \tau) + l\tau = 0.$$

Ainsi on pourra considérer  $K$  comme une somme de masse de Dirac à constante près. Il en produit un effet de resonance pour ces valeurs discrètes. Si la masse de  $K$  se concentre sur  $\tau$  qui est loin de  $t$ , par exemple  $\tau/2$ ,  $A(t)$  borné par  $A$  une constante, alors (15) peut s'écrire comme :

$$\varphi(t) \leq A + c \frac{t}{2} \varphi\left(\frac{t}{2}\right).$$

Par simple itération, on obtient

$$\varphi(t) \leq A \sum_n \frac{c^n t^n}{2^{n(n-1)/2}} \quad (17)$$

qui a une croissance comme  $Ae^{c'(\log t)^2}$ , qui est plus lent que tous les  $e^{\epsilon t}$ ,  $\forall \epsilon > 0$ . Donc  $\|\rho(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda'+\mu'}}$  ainsi que pour  $F(t) = \nabla W * \rho(t)$ , en supposant  $\hat{F}(t, 0) = 0, \forall \lambda' < \lambda$ , on a toujours

$$\|F(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda'+\mu'}} \leq CAe^{-2\pi(\lambda-\lambda')t}e^{\epsilon t}.$$

Pour  $\epsilon$  assez petit, on a la décroissance exponentielle de  $F$ .

Des études plus poussées du noyau  $K$  permettent d'obtenir l'énoncé suivant :

**Proposition 12.** Soit  $f^0$  tel que  $|\tilde{f}^0(\eta)| = O(e^{-2\pi\lambda_0|\eta|})$  et satisfait les critères de Penrose avec le largeur de stabilité  $\lambda_L$ , et  $\widehat{\nabla W}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\gamma}\right)$ , avec  $\gamma \geq 1$ . Et  $f^i$  et  $\bar{h}$  vérifient une certaine petitesse associée à  $\lambda, \mu$ , avec  $0 < \lambda < \min(\lambda_0, \lambda_L)$ , et  $\mu > 0$ .

Alors  $\forall \mu' < \mu$ , et  $\lambda/2 < \lambda' < \lambda$ ,

$$\sup_{t \geq 0} \|F(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda't+\mu'}} < C(\lambda', \mu'),$$

où  $C(\lambda', \mu')$  est une fonction qu'on peut expliciter.

*Remarque.* L'intérêt d'avoir une régularité glissante de  $F$  bornée, c'est qu'on peut la transformer en tout moment en une *décroissance exponentielle dans le temps*, pourvu que  $F$  a une moyenne nulle, ici c'est le cas, car  $F$  est un gradient.

Plus précisément,

$$\|F\| := \sup_{t \geq 0} \|F(t, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda t + \mu}} \quad (18)$$

alors  $\forall \lambda' < \lambda, \mu' < \mu, s > \tau$ ,

$$\|F(s, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda' s + \mu'}} \leq e^{-2\pi(\lambda s - \lambda' \tau)} \|F(s, \cdot)\|_{\mathcal{F}^{\lambda s + \mu}} \leq e^{-2\pi(\lambda - \lambda')s} \|F\| \quad (19)$$

De belles expériences physiques ont été réalisées par Malmberg et ses collègues, qui ont enregistrées des vrais effets de la résonance dans un plasma. cf [MA].

## Références

- [GL] *Gauss's law* from en.wikipedia.org.
- [LCE] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1997.
- [LS] Z. Lin, W. Strauss, *Nonlinear stability and instability of relativistic Vlasov-Maxwell systems*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 2007.
- [MA] B. Malmberg, C. Wharton, R. Gould, T. O'Neil *Plasma wave echo experiment*, Pys. Rev. Letters 20, 3 (1968), 95 - 97.
- [MV] C. Mouhot, C. Villani, *On Landau damping*, Acta Mathematica 207(2011), 29-201.
- [SS] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Princeton lectures in analysis : Complex analysis*, Princeton University Press, 2007.
- [TB] B. Texier, *Équations différentielles ordinaires, Feuille de TD 1*, FIMFA, premier semestre 2011-2012.

- [Vi] C. Villani, *Landau damping*, notes de cours, 2010, <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/villani/surveys.html>
- [VIA] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.